

Научная статья

УДК 517.982.256

DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-174-186

СВОЙСТВА СОЛНЕЧНОСТИ КУСОЧНО АППРОКСИМАТИВНО КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВ

Игорь Германович Царьков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, Россия

tsar@mech.math.msu.su, igtsarkov@yandex.ru

Аннотация

Изучаются вопросы аппроксимации кусочно аппроксимативно компактными чебышёвскими множествами в линейных нормированных пространствах. Показано, что в локально равномерно выпуклых банаховых пространствах такие множества являются солнцами и B -связны.

Ключевые слова и фразы

локально равномерно выпуклые пространства, кусочно аппроксимативно компактные чебышёвские множества, солнце.

Источник финансирования

Исследование поддержано Московским центром фундаментальной и прикладной математики // МГУ имени М. В. Ломоносова по соглашению No 075-15-2025-345.

Для цитирования

Царьков И. Г. Свойства солнечности для кусочно аппроксимативно компактных множеств // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 4, С. 174-186. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-174-186

Solarity of piecewise approximatively compact Chebyshev sets

Igor' G. Tsar'kov

Moscow Lomonosov State University, Moscow, Russia

tsar@mech.math.msu.su, igtsarkov@yandex.ru

Abstract

Approximation by piecewise approximatively compact Chebyshev sets in normed linear spaces is studied. It is shown that any such set in locally uniformly convex Banach space is a sun and has connected intersections with closed balls.

Keywords

locally uniformly convex Banach space, piecewise approximatively compact Chebyshev set, sun.

Funding

The paper was published with the financial support of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics at Lomonosov Moscow State University under the agreement 075-15-2025-345.

For citation

Tsar'kov I. G. Solarity of piecewise approximatively compact Chebyshev sets // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 4, P. 174-186. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-174-186

§ 1. Введение и постановка задачи

Нам понадобятся следующие обозначения. Для произвольного множества M в некотором линейном нормированном пространстве X через $\varrho(y, M)$ обозначим расстояние до множества M , т.е. величину

$$\inf_{z \in M} \|z - y\| \quad (y \in X).$$

Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество

$$\{y \in M \mid \|y - x\| = \varrho(x, M)\}.$$

Отображение P_M называют метрической проекцией на множество M . Через

$$B(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x\| \leq r\} \quad \text{и} \quad S(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x\| = r\}$$

обозначим соответственно шар и сферу с центром x радиуса $r \geq 0$. Единичные шар и сфера обозначаются B и S , соответственно. Далее, $\mathring{B}(x, r) = \{y \in X \mid \|y - x\| < r\}$ – открытый шар с центром x радиуса r .

Целью этой работы является изучение геометрической структуры чебышёвских множеств и связанными с этим понятием свойств устойчивости метрической проекции, а также свойств локальной и глобальной солнечности. Последние понятия значимы не только в теории аппроксимации (см.

[1], [2], [3], [4], [5]), но и полезны в других областях математики. В частности, эти свойства играют особую роль в задачах геометрической оптики и в вопросах гладкости решений уравнения эйконала (см. [6], [7], [8], [9]). В самой теории приближения они играют не только техническую роль, но и дают возможность получать характеристики элементов наилучших приближений для дальнейшего использования в алгоритмах численной аппроксимации.

Впервые задача о связи аппроксимативной компактности и чебышёвских множеств была рассмотрена в работе Н.В. Ефимова и С.Б. Стечкина [10]. Отметим, что для аппроксимативно компактных чебышёвских множеств M выполняется условие $\text{diam } P_M^\delta(x) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0+$ (здесь $\text{diam } N$ – диаметр множества N , $P_M^\delta x := \{y \in M \mid \|y - x\| \leq \varrho(x, M) + \delta\} = M \cap B(x, \varrho(x, M) + \delta)$), что отражает важное свойство таких множеств, связанное с устойчивостью наилучшего приближения, что безусловно важно в численных методах. Соответствующие задачи будут решаться в классах (CLUR) и (LUR). Нас будет интересовать структура чебышёвских множеств, состоящих из не более, чем счетного числа аппроксимативно компактных множеств. Отметим, что Ошман [11, следствие 3] и независимо Панда и Капур [12] показали, что в нормированных CLUR-пространствах класс чебышёвских множеств с непрерывной метрической проекцией совпадает с классом аппроксимативно компактных чебышёвских множеств. Поэтому и в нашем случае можно изучать множества, состоящие из аппроксимативно компактных кусков или из кусков с непрерывной метрической проекцией на них, поскольку разницы между ними не будет. В основном мы продолжим исследования, начатые работой [13] автора, в которой были рассмотрены свойства кусочно аппроксимативно компактных множеств в равномерно выпуклых пространствах, а также получены важные приложения для обобщенных дробей и ридж-функций. Поскольку плоскость существования в CLUR-пространстве аппроксимативно компактна (см., например, [5]), то для их счетного объединения фактически будут получены их структурные свойства. Таким образом, настоящая работа продолжит изучения множеств, представленных не более чем счетным объединением плоскостей. Указанные объекты изучались в многочисленных работах, написанных в соавторстве с А.Р. Алимовым (см. [13], [14], [15], [16], [17]).

В настоящей работе мы покажем, что кусочно аппроксимативно компактное чебышёвское множество в локально равномерно выпуклом банаховом пространстве будет чебышёвским солнцем (теорема 1). Также это множество будет B -линейно связным (т.е. имеет связные пересечения с замкнутыми шарами), а если пространство дополнительно является глад-

ким, то и выпуклым (следствие 3).

§ 2. Свойства кусочно аппроксимативно компактных чебышёвских множеств

Определение 1. Пусть X – линейное нормированное пространство. Будем писать $X \in (\text{CLUR})$, если для любой последовательности $\{s_n\} \subset X$: $\|s_n\| \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) и точки $s \in S$ из условия

$$\left\| \frac{s + s_n}{2} \right\| \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

вытекает, что существует подпоследовательность $\{s_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $s_0 \in S$. Если же из этого условия вытекает, что последовательность $\{s_n\}$ сходится к точке s , то пространство X называется локально равномерно выпуклым, и в этом случае пишут, что $X \in (\text{LUR})$. Отметим, что $(\text{LUR}) = (\text{CLUR}) \cap (\text{R})$, где через (R) обозначают класс строго выпуклых пространств.

Хорошо известно, что класс (CLUR) является “особой точкой” теории приближений. По поводу ряда результатов об аппроксимативных и геометрических свойствах множеств в таких пространствах см. [18] и [19].

Определение 2. Пусть M – непустое подмножество $(X, \|\cdot\|)$. Точка $x \in X$ называется *точкой аппроксимативной компактности* для M , если для любой последовательности $\{v_n\} \subset X$: $\|v_n - x\| \rightarrow \varrho(x, M)$ ($n \rightarrow \infty$) существует подпоследовательность $\{v_{n_k}\}$, сходящаяся в X к некоторой точке $v_0 \in M$. Отметим, что в этом случае $v_0 \in P_M(x)$.

Определение 3. Пусть $\emptyset \neq M \subset X$. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \emptyset$ (называемая *точкой светимости*) такая, что $y \in P_M((1 - \lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geq 0$ (это геометрически означает, что из точки y исходит луч (солнечный луч), проходящий через x , для каждой точки которого y является ближайшей из M).

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \emptyset$ и каждая точка $y \in P_M x$ является точкой светимости. Если все точки из $K \subset X \setminus M$ являются точками солнечности (строгой солнечности), то множество M называют солнцем (строгим солнцем) относительно множества K . В случае, когда $K = X \setminus M$, говорят, что M – солнце (строгое солнце). *Чебышёвским множеством* называется такое множество, для которого каждая точка пространства X имеет единственную ближайшую в этом множестве. Чебышёвским солнцем называется чебышёвское множество, являющееся строгим солнцем.

Отметим, что солнце в гладком пространстве является выпуклым множеством (см. [10], [3]).

Лемма 1. Пусть $X \in (\text{CLUR})$, $M \subset X$ – чебышёвское множество, $z_0 \in X \setminus M$, $P_M(z_0) = \{x_0\}$. Предположим, что существуют последовательности $\{z_n\}$ и $\{y_n\}$, такие, что $\{x_n\} = P_M(z_n)$, $y_n \in [x_n, z_n]$ ($n \in \mathbb{N}$), и $y_n \rightarrow z_0$, $\|x_n - y_n\| \rightarrow R > 0$, $\|y_n - z_n\| \rightarrow r > 0$ ($n \rightarrow \infty$). Тогда существуют подпоследовательности $x_{n_k} \rightarrow x_0$, $z_{n_k} \rightarrow w$ такая, что $P_M(w) = \{x_0\}$ ($n \rightarrow \infty$). При этом $\|x_0 - z_0\| + \|z_0 - w\| = R + r = \|x_0 - w\| = \varrho(w, M)$.

Доказательство. Без потери общности будем считать, что $z_0 = 0$. Тогда $\|x_0\| = R$, т.к. $\varrho(y_n, M) \rightarrow \varrho(z_0, M) = \|x_0 - z_0\| = \|x_0\|$. Сделаем параллельный сдвиг отрезка $[x_n, z_n]$ на вектор $(-y_n)$, и положим $x'_n := x_n - y_n$, $z'_n := z_n - y_n$, $x'_0 := x_0 - y_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда

$$\|x'_n\| = \|x_n - y_n\| = R + o(1), \quad \|z'_n\| = \|z_n - y_n\| = r + o(1).$$

Сразу же отметим, что поскольку x_n является ближайшей точкой для z_n во множестве M , то $\|x'_0 - z'_n\| = \|x_0 - z_n\| \geq \|x_n - z_n\| = \|x'_n - z'_n\|$ ($n \in \mathbb{N}$).

Пусть

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &:= \frac{x'_0}{\|x'_0\|} = \frac{x'_0}{R + o(1)} = \frac{x'_0}{R} + o(1) \in S, \\ \hat{x}_n &:= \frac{x'_n}{\|x'_n\|} = \frac{x'_n}{R} + o(1) \in S, \quad \hat{z}_n := \frac{z'_n}{\|x'_n\|} = \frac{z'_n}{R} + o(1). \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \lambda_n &:= \frac{\|\hat{x}_n - 0\|}{\|\hat{z}_n - \hat{x}_n\|} = \frac{\frac{\|x'_n\|}{R} + o(1)}{\frac{\|x'_n - z'_n\|}{R} + o(1)} = \frac{\|x'_n\| + o(1)}{\|x'_n - z'_n\| + o(1)} \\ &= \frac{R + o(1)}{R + r + o(1)} = \frac{R}{R + r} + o(1). \end{aligned}$$

Без потери общности будем считать, что $r < R$, а, следовательно, $\lambda_n > \frac{1}{2}$ для достаточно больших n . Также будем полагать, что $\lambda_n > \frac{1}{2}$ для всех n , т.е. $1 - \lambda_n < \frac{1}{2}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Возьмем точку $\tau_n \in [\hat{x}_n, \hat{x}_0]$ так, чтобы $0\tau_n\|\hat{x}_0\hat{z}_n$. Тогда в силу подобия треугольников $\triangle \hat{x}_n\tau_n0$ и $\triangle \hat{x}_n\hat{x}_0\hat{z}_n$ выполнено равенство:

$$\begin{aligned} \|\tau_n\| &= \lambda_n \|\hat{x}_0 - \hat{z}_n\| = \lambda_n \left\| \frac{x'_0 - z'_n}{R} + o(1) \right\| \geq \lambda_n \left(\frac{\|x'_n - z'_n\|}{R} + o(1) \right) \\ &= \left(\frac{R}{R + r} + o(1) \right) \left(\frac{R + r}{R} + o(1) \right) = 1 + o(1). \end{aligned}$$

Так как $\hat{x}_n, \hat{x}_0 \in S$, то $\|\tau_n\| \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Учитывая это, мы получим, что $\|\tau_n\| = 1 + o(1)$. При этом в силу подобия тех же треугольников $\frac{\|\hat{x}_n - \tau_n\|}{\|\hat{x}_n - \hat{x}_0\|} = \lambda_n$, откуда $\hat{x}_n - \tau_n = \lambda_n(\hat{x}_n - \hat{x}_0)$, т.е. $\tau_n = (1 - \lambda_n)\hat{x}_n + \lambda_n\hat{x}_0$ ($n \in \mathbb{N}$). Положим $\hat{\tau}_n := \frac{\tau_n}{\|\tau_n\|} \in S$, тогда $\|\hat{\tau}_n - \tau_n\| = o(1)$, и луч, проходящий через $\hat{x}_0$ и $\hat{\tau}_n$, выходит за пределы шара $\overset{\circ}{B}$ после точки $\hat{\tau}_n$. На этом луче выберем точку a_n так, что

$$\left(a_n - \frac{\hat{x}_0 + \hat{x}_n}{2}\right) \parallel (\hat{\tau}_n - \tau_n).$$

Тогда точка a_n лежит вне шара $\overset{\circ}{B}$ и

$$\frac{\left\|a_n - \frac{\hat{x}_0 + \hat{x}_n}{2}\right\|}{\left\|\frac{\hat{x}_0 + \hat{x}_n}{2} - \hat{x}_0\right\|} = \frac{\|\hat{\tau}_n - \tau_n\|}{\|\tau_n - \hat{x}_0\|} = \frac{\|\hat{\tau}_n - \tau_n\|}{(1 - \lambda_n)\|\hat{x}_n - \hat{x}_0\|},$$

и, следовательно,

$$\left\|a_n - \frac{\hat{x}_0 + \hat{x}_n}{2}\right\| = \frac{2\|\hat{\tau}_n - \tau_n\|}{1 - \lambda_n} = o(1).$$

Поэтому

$$\left\|a_n\right\| - \left\|\frac{\hat{x}_n + \hat{x}_0}{2}\right\| \leq \left\|a_n - \frac{\hat{x}_n + \hat{x}_0}{2}\right\| = o(1),$$

и учитывая, что $\|a_n\| \geq 1$, мы получим, что $\left\|\frac{\hat{x}_n + \hat{x}_0}{2}\right\| \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$).

В силу того, что $X \in (\text{CLUR})$, существует подпоследовательность $\{\hat{x}_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $\hat{x} \in S$, а, следовательно, $\{x_{n_k}\}$ сходится к некоторой точке x . Так как $\{y_{n_k}\}$ сходится к нулю, мы получим, что x — ближайшая точка для нуля. И поскольку $P_M(0) = \{x_0\}$, то $x = x_0$. Поэтому $x_{n_k} \rightarrow x_0$, $z_{n_k} \rightarrow z_0 = -x_0 \frac{r}{R}$, т.е. точка $w = -x_0 \frac{r}{R}$ имеет в качестве ближайшей из M точку x_0 . При этом $\|x_{n_k} - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - z_{n_k}\| = \|x_{n_k} - z_{n_k}\| = \varrho(z_{n_k}, M) \rightarrow \varrho(w, M) = \|x_0 - w\|$ при $n \rightarrow \infty$. Переходя к пределу в этом равенстве, мы получим, что

$$\|x_0 - z_0\| + \|z_0 - w\| = R + r = \|x_0 - w\| = \varrho(w, M).$$

Лемма доказана. $\square$

Следствие 1. Пусть в условиях леммы 1 $X \in (\text{LUR})$. Тогда к утверждениям этой леммы добавится еще одно: $z_0 \in [x_0, w]$ и $P_M(z) = x_0$ для всех точек $z \in [x_0, w]$.

Доказательство. Поскольку $(\text{LUR}) = (\text{CLUR}) \cap (\text{R})$, то из строгой выпуклости пространства X вытекает, что условие $\|x_0 - z_0\| + \|z_0 - w\| = R + r = \|x_0 - w\| = \varrho(w, M)$ влечет $z_0 \in [x_0, w]$. Так как $P_M(w) = x_0$, то $P_M(z) = x_0$ для всех точек $z \in [x_0, w]$. Следствие доказано. $\square$

Теорема 1. Пусть $X \in (\text{LUR})$ – банахово пространство, $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$, где M_n – аппроксимативно компактное множество в X . Тогда, если M – чебышёвское множество, то M – солнце.

Доказательство. Предположим от противного, что M не является солнцем. Тогда существует такая точка $x_0 \in X \setminus M$, что для точки y_0 , такой, что $\{y_0\} = P_M(x_0)$, на луче $\ell_0 := \{y_0 + \lambda(x_0 - y_0) \mid \lambda > 1\}$ нет точек, для которых точка y_0 является ближайшей в M . Отметим, что в LUR-пространстве все точки, лежащие на полуинтервале $(x, y]$, где $x \in X \setminus M$, а y – ее ближайшая в M , являются точками аппроксимативной компактности для множества M , и y является для этих точек единственной ближайшей (см., например, [18]). Введем обозначение $K(N) := \bigcup_{n=1}^N M_n$.

1°. Для любого номера $N_0 \in \mathbb{N}$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется точка $x'_0 \in O_\varepsilon(x_0)$, для которой $\varrho(x'_0, \bigcup_{n > N_0} M_n) \leq \varrho(x'_0, M \setminus K(N_0)) < \varrho(x'_0, K(N_0))$. Это вытекает из того, что множество $K(N_0)$ (как конечное объединение аппроксимативно компактных множеств) является аппроксимативно компактным. Поэтому, если $\varrho(x, M) = \varrho(x, K(N_0))$ для всех точек $x \in O_\varepsilon(x_0)$, то в силу аппроксимативной компактности множества $K(N_0)$ одна из ближайших точек для M лежит в $K(N_0)$, а так как M – чебышёвское множество, то для каждой точки $x \in O_\varepsilon(x_0)$ ближайшая единственна и лежит в $K(N_0)$. Тем самым метрическая проекция P_M – однозначное непрерывное отображение на $O_\varepsilon(x_0)$. Отсюда следует (см. [8, замечание 3]), что все точки окрестности $O_\varepsilon(x_0)$ являются точками “локальной солнечности”, и, следовательно, существует точка x_0^1 : такая, что $P_M(x_0^1) = \{y_0\}$ и $x_0 \in [y_0, x_0^1]$, т.е. $x_0^1 \in \ell_0$, чего не должно быть.

Следовательно, для любого номера $N_0 \in \mathbb{N}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется точка $x_0^0 \in O_\varepsilon(x_0)$ такая, что $\varrho(x_0^0, K(N_0)) > \varrho(x_0^0, M)$. Поэтому найдется сходящаяся к точке x_0 последовательность $\{x_m^1\}$, для которой $\varrho(x_m^1, M) < \varrho(x_m^1, K(N_0))$. Пусть y_m^1 – ближайшая точка для точки x_m^1 во множестве M , тогда $y_m^1 \in M \setminus K(N_0)$. Пусть θ_m^1 – наиболее удаленная от точки x_m^1 на луче $\{y_m^1 + \lambda(x_m^1 - y_m^1) \mid \lambda \geq 1\}$ среди точек, для которых y_m^1 является ближайшей. В этом случае все точки из полуинтервала $(\theta_m^1, y_m^1]$ являются точками аппроксимативной компактности, у которых y_m^1 – единственная ближайшая в M , и $\varrho(\theta_m^1, M) < \varrho(\theta_m^1, K(N_0))$. Кроме того, в силу леммы 1 и следствия 1 имеем $\|x_m^1 - \theta_m^1\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$), а, следовательно, $\|\theta_m^1 - x_0\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$). Выберем m так, чтобы $\|\theta_m^1 - x_0\| < \varepsilon_0/3$. Возьмем $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0/3)$ так, чтобы $\varrho(x, M) < \varrho(x, K(N_0))$ для всех точек $x \in O_{\varepsilon_1}(\theta_m^1)$. Положим $x_1 := \theta_m^1$.

2°. Общий шаг индукции. Пусть построены точки x_{n-1} , числа $N_{n-1} \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_{n-1} > 0$. Возьмем произвольное число $N_n \in \mathbb{N}$, $N_n > N_{n-1}$. Так же, как и выше, для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n-1}/3)$ найдется точка $x_0^n \in O_\varepsilon(x_{n-1})$ такая, что $\varrho(x_0^n, M) < \varrho(x_0^n, K(N_n))$. Отсюда существует сходящаяся к x_{n-1} последо-

вательность $\{x_m^n\}$, для которой $\varrho(x_m^n, M) < \varrho(x_m^n, K(N_n))$. Пусть y_m^n – ближайшая точка для x_m^n в M , и θ_m^n – наиболее удаленная от y_m^n точка на луче $\{y_m^n + \lambda(x_m^n - y_m^n) \mid \lambda \geq 1\}$ среди тех точек, для которых y_m^n является ближайшей точкой в M . В этом случае все точки из полуинтервала $(\theta_m^n, y_m^n]$ являются точками аппроксимативной компактности, для которых y_m^n – единственная ближайшая в M , и $\varrho(\theta_m^n, M) < \varrho(\theta_m^n, K(N_n))$. Кроме того, в силу леммы 1 и следствия 1 имеем $\|x_m^n - \theta_m^n\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$), а, следовательно, $\|\theta_m^n - x_{n-1}\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$). Выберем m так, чтобы $\|\theta_m^n - x_{n-1}\| < \varepsilon_{n-1}/3$. Возьмем $\varepsilon_n \in (0, \varepsilon_{n-1}/3)$ так, чтобы $\varrho(x, M) < \varrho(x, K(N_n))$ для всех точек $x \in O_{\varepsilon_n}(\theta_m^n)$. Положим $x_n := \theta_m^n$.

3°. Тем самым, по индукции будет построена последовательности $\{x_n\} \subset X$ и последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$ таких, что $\|x_m - x_{m-1}\| < \frac{\varepsilon_{m-1}}{3}$, $0 < \varepsilon_m < \frac{\varepsilon_{m-1}}{3}$ и $O_{\varepsilon_{m+1}}(x_{m+1}) \subset O_{\varepsilon_m}(x_m)$ ($m \in \mathbb{N}$). Тогда ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \|x_m - x_{m-1}\|$ сходится, и, следовательно, в силу полноты пространства X сходится ряд $x_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (x_m - x_{m-1}) =: x^0$. Тогда

$$\|x^0 - x_k\| \leq \sum_{m=k+1}^{\infty} \|x_m - x_{m-1}\| < \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{m-1}}{3} \leq \varepsilon_k \sum_{m=1}^{\infty} 3^{-m} = \varepsilon_k/2,$$

т.е. $x^0 \in O_{\varepsilon_k/2}(x_k)$ ($k \in \mathbb{N}$). Поскольку ближайшие точки для всех $x \in O_{\varepsilon_k}(x_k)$ лежат во множестве $M \setminus K(N_{k-1}) \subset \bigcup_{n \geq k} M_n$, то для x^0 нет ближайших во множестве M . Это противоречит условию, что M – чебышёвское множество. Следовательно, множество M является солнцем. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. Пусть $X \in (\text{LUR})$ – банахово пространство, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n – аппроксимативно компактное множество в X ($n \in \mathbb{N}$). Тогда, если M – чебышёвское множество, то метрическая проекция P_M на M непрерывна.

Доказательство. Если $x \in M$, то $\varrho(w, M) \leq \|w - x\| < \varepsilon$ для всех точек $w \in O_{\varepsilon}(x)$. Следовательно, $P_M(w) \subset O_{2\varepsilon}(x)$, если $w \rightarrow x$, то $P_M(w) \rightarrow P_M(x) = \{x\}$. Таким образом, метрическая проекция непрерывна во всех точках множества M .

Пусть теперь $x \in X \setminus M$. Предположим от противного, что отображение P_M разрывно в точке x . Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset X$ такая, что $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), и $\|P_M(x_n) - P_M(x)\| \geq 2\delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{y\} = P_M(x)$, $\{y_n\} = P_M(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Поскольку в силу теоремы 1 множество M является солнцем, то луч $\{y_n + \lambda(x_n - y_n) \mid \lambda > 0\}$ состоит из точек, для которых ближайшей в M является точка y_n ($n \in \mathbb{N}$). Отсюда в силу леммы 1 $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ при ($n \rightarrow \infty$), чего не должно быть. Это противоречие завершает доказательство следствия. $\square$

Определение 4. Множество B -линейно связно ($\mathring{B}$ -линейно связно), если его пересечение множества M с любым замкнутым (открытым) шаром линейно связно. Отметим, что если множество B -линейно связно, то оно также и $\mathring{B}$ -линейно связно.

Следствие 3. Пусть $X \in (\text{LUR})$ – банахово пространство, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n – аппроксимативно компактное множество в X ($n \in \mathbb{N}$), и M – чебышёвское множество. Тогда множество M B -линейно связно, а если дополнительно X – гладкое пространство, то M выпукло.

Доказательство. Пусть $N := M \cap B(x, r)$, где $x \in X$, $r > 0$ – произвольны, тогда непрерывный образ ломаной $z_1 x z_2$ при непрерывном отображении P_M соединяет любые точки $z_1, z_2 \in N$, т.е. множество N линейно связно. Поскольку M является солнцем в силу теоремы 1, то в гладком пространстве X оно выпукло. Следствие доказано. $\square$

В [17, теорема 4.1]) доказано, что чебышёвское множество, представляющее собой счетное объединение плоскостей и такое, что ни одна из плоскостей не содержит другой, не является B -связным множеством, а, следовательно, не является B -линейно связным множеством. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. Пусть $X \in (\text{LUR})$ – банахово пространство, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, где L_n – плоскости существования, и ни одна из них не содержит другую. Тогда множество M не может быть чебышёвским.

Благодарность. Исследование поддержано Московским центром фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М. В. Ломоносова по соглашению №075-15-2025-345.

Список литературы

1. Tsar'kov I.G. Properties of suns in the spaces L^1 and $C(Q)$ // *Russ. J. Math. Phys.* 2021 V. 28. P. 398–405.
2. Алимов А.Р., Царьков И.Г. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // *УМН* 2016. Т. 71 № 1(427). С. 3–84.
3. Балаганский В.С., Власов Л.П. Проблема выпуклости чебышёвских множеств // *УМН* 1996. Т. 51. № 6(312). С. 125–188.
4. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. *Geometric Approximation Theory*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2021.

5. Царьков И.Г. Непрерывность метрической проекции, структурные и аппроксимативные свойства множеств // *Матем. заметки* 1990. Т. 47, № 2. С. 137–148.
6. Царьков И.Г. Аппроксимативная компактность и неединственность в вариационных задачах и их приложения к дифференциальным уравнениям // *Матем. сб.* 2011. Т. 202, № 6. С. 133–158.
7. Царьков И.Г. Неединственность решений некоторых дифференциальных уравнений и их связь с геометрической теорией приближения // *Матем. заметки* 2004. Т. 75, № 2. С. 287–301.
8. Tsar'kov I.G. Smoothness of solutions of the eikonal equation and regular points of their level surfaces // *Russ. J. Math. Phys.* 2023. V. 30, N. 2. P. 260–269.
9. Tsar'kov I.G. Geometry of the singular set of hypersurfaces and the eikonal equation // *Russ. J. Math. Phys.* 2022. V. 29, N. 2. P. 240–248
10. Ефимов Н.В., Стечкин С.Б. Аппроксимативная компактность и чебышёвские множества // *Докл. АН СССР*. 1961. Т. 140, № 3. С. 522–524.
11. Ошман Е.В. Чебышевские множества и непрерывность метрической проекции // *Изв. вузов. Матем.* 1970. № 9. С. 78–82
12. Panda B.B., Kapoor O.P. A generalization of local uniform convexity of the norm // *J. Math. Anal. Appl.* 1975. V. 52. P. 300–308.
13. Царьков И.Г. Чебышевские множества с кусочно-непрерывной метрической проекцией // *Матем. заметки*. 2023. Т. 113, № 6. С. 905–917.
14. Алимов А.Р., Царьков И.Г. Чебышёвские множества, являющиеся объединением плоскостей // *УМН*. 2024. Т. 79, № 2(476). С. 183–184.
15. Alimov A.R., Tsar'kov I. G. Chebyshev unions of planes, and their approximative and geometric properties // *J. Approx. Theory* 2024. V. 298, No. 106009–12.
16. Алимов А.Р. Строгие солнца, составленные из плоскостей // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2024. Т. 30, № 4. С. 27–36.
17. Алимов А.Р., Царьков И.Г. Чебышёвские множества, составленные из объединения подпространств в несимметрично нормированных пространствах // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2024. Т. 88, № 6. С. 23–43.

18. Алимов А.Р., Царьков И.Г. Классические понятия теории приближений в несимметричных CLUR-пространствах // *Матем. заметки* 2024. Т. 116, № 3. С. 339–354.
19. Алимов А.Р., Царьков И.Г. Устойчивость аппроксимации в классических задачах геометрической теории приближений // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2025. Т. 89, № 6. С. 3–19.

References

1. Tsar'kov I.G. Properties of suns in the spaces L^1 and $C(Q)$ // *Russ. J. Math. Phys.* 2021 V. 28. P. 398–405.
2. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Connectedness and solarity in problems of best and near-best approximation // *Russian Math. Surveys* 2016. V. 71 N. 1(427). С. 1–77.
3. Balaganskii V.S., Vlasov L.P. The problem of convexity of Chebyshev set // *Russian Math. Surveys* 1996. V. 51. N. 6(312). P. 1127–1190.
4. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. *Geometric Approximation Theory*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2021.
5. Tsar'kov I.G. Continuity of the metric projection, structural and approximate properties of sets // *Math. Notes*, 1990. V. 47, N. 2. С. 218–227.
6. Tsar'kov I.G. Approximative compactness and nonuniqueness in variational problems, and applications to differential equations // *Sb. Math.* 2011. V. 202, N. 6. P. 909–934.
7. Tsar'kov I.G. Nonunique solvability of certain differential equations and their connection with geometric approximation theory // *Math. Notes*, 2004. V. 75, N. 2. P. 259–271.
8. Tsar'kov I.G. Smoothness of solutions of the eikonal equation and regular points of their level surfaces // *Russ. J. Math. Phys.* 2023. V. 30, N. 2. P. 260–269.
9. Tsar'kov I.G. Geometry of the singular set of hypersurfaces and the eikonal equation // *Russ. J. Math. Phys.* 2022. V. 29, N. 2. P. 240–248
10. Efimov N.V., Stechkin S.B. Approximate compactness and Chebyshev sets // *Докл. АН СССР*. 1961. Т. 140, N. 3. С. 522–524.

11. Oshman E.V. Chebyshev sets and the continuity of metric projection // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* 1970. N. 9. P. 78–82
12. Panda B.B., Kapoor O.P. A generalization of local uniform convexity of the norm // *J. Math. Anal. Appl.* 1975. V. 52. P. 300–308.
13. Tsar'kov I.G. Chebyshev sets with piecewise continuous metric projection // *Math. Notes*. 2023. V. 113, N.6. P. 840–849.
14. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Чебышёвские множества, являющиеся объединением плоскостей // *Russian Math. Surveys*. 2024. V. 79, N. 2(476). P. 361–362.
15. Alimov A.R., Tsar'kov I. G. Chebyshev unions of planes, and their approximative and geometric properties // *J. Approx. Theory* 2024. V. 298, No. 106009–12.
16. Alimov A.R. Strict suns composed of planes // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2024. V. 327, Supp. 1, P S1–S9.
17. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Чебышёвские множества, составленные из объединения подпространств в несимметрично нормированных пространствах // *Izv. Math* 2024. V. 88, N. 6. P. 1032–1049.
18. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Classical concepts of approximation theory in asymmetric CLUR-spaces // *Math. Notes* 2024. V. 116, N. 3. P. 408–420.
19. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Stability of best approximation in classical problems of geometric approximation theory // *Izv. Math.* 2025. V. 89, N. 6. P. 3–19.

Информация об авторе

Игорь Германович Царьков, доктор физико-математических наук, профессор

SPIN 5271-4044 AuthorID: 7947

Scopus Author ID 6602443197

Author Information

Igor' G. Tsar'kov, Doctor of Mathematics, Professor

SPIN 5271-4044 AuthorID: 7947

Scopus Author ID 6602443197

Статья поступила в редакцию 13.08.2025;

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 4, С. 174–186

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 4, P. 174–186

*одобрена после рецензирования 30.08.2025; принята к публикации
05.11.2025*

*The article was submitted 13.08.2025;
approved after reviewing 30.08.2025; accepted for publication 05.11.2025*